Modelando um quantificador não clássico

Mauri Cunha do Nascimento
UNESP, Faculdade de Ciências
mauri@fc.unesp.br

Maria Cláudia Cabrini Grácio
UNESP, Faculdade de Filosofia e Ciências
cabrini@marilia.unesp.br

Hércules de Araújo Feitosa
UNESP, Faculdade de Ciências
haf@fc.unesp.br

Introdução

As linguagens naturais apresentam quantificadores distintos dos quantificadores lógicos 'para todo - $\forall$' e 'existe algum - $\exists$' que não podem ser definidos a partir destes, mas que merecem ser investigados em contextos matemáticos e tratados em linguagens formais de modo a seguir os desenvolvimentos lógicos usuais e, ao mesmo tempo, receber um tratamento que explore as noções fundamentais desses quantificadores. São exemplos de quantificadores naturais, as expressões: muitos, quase todos, maioria, uma boa parte, bastante, entre outros.

Sette, Carnielli e Veloso (1999) e Carnielli e Veloso (1997) introduziram a *lógica dos ultrafiltros*, destinada a formalizar proposições gerais do tipo "quase todos" ou "geralmente". Essa lógica apresenta como modelo uma estrutura de primeira ordem clássica $\mathcal{A}$, acrescida de um ultrafiltro, definido sobre o universo de $\mathcal{A}$, o qual argumentam os autores ser uma estrutura matemática conveniente para o conceito de "quase todos".

Motivada por esses trabalhos, Grácio (1999) introduziu a família das *lógicas moduladas* e, dentre elas, a lógica do plausível que tem o significado de "uma boa parte" formalizado pelo conceito de *pseudo-topologia*. Esta estrutura matemática, como seu nome reivindica, é uma variação do conceito matemático de topologia, conforme veremos a seguir.

1. A formalização lógica do quantificador do plausível

A Lógica do Plausível é uma particularização das lógicas moduladas. Sintaticamente, cada particularização das lógicas moduladas é caracterizada pela inclusão de um novo quantificador que não é exprimível em função dos quantificadores clássicos de primeira ordem (universal e existencial), destinado a formalizar algum quantificador da linguagem natural. Semanticamente, este novo quantificador é interpretado por um conjunto de subconjuntos do universo, definido na estrutura de primeira ordem, que contemple as características do quantificador na linguagem natural.

A Lógica do Plausível é destinada a formalizar proposições do tipo "uma boa parte" no sentido de "para uma parte significativa". Estas proposições podem ser consideradas como uma forma particular de proposição indutiva, as proposições plausíveis, baseadas em evidências favoráveis.

Para esta formalização, o quantificador P é introduzido na linguagem clássica de primeira ordem. Uma sentença quantificada da forma "Px $\varphi(x)$" significa "para uma parte significativa de x, $\varphi(x)$" ou "para uma boa parte de x, $\varphi(x)$". Semanticamente, o quantificador P está associado a um conceito derivado do conceito de topologia, denominado *pseudo-topologia*. Grácio (1999) argumenta que esta estrutura matemática captura uma noção de plausibilidade.

Neste sistema, o termo "para uma parte significativa..." quer dizer um conjunto significativo de evidências favoráveis, mas que não é necessariamente grande. Considera-se que sentenças deste tipo representam proposições plausíveis de uma base de conhecimento.

Por exemplo, baseados em nosso conjunto de evidências, podemos declarar as seguintes proposições plausíveis sobre seres humanos: "uma boa parte das pessoas gosta de flores"; "Uma boa parte das pessoas gosta de café"; "uma boa parte das pessoas gosta de praticar esporte" "uma boa parte das pessoas não gosta da guerra". Baseados neste conjunto de proposições, podemos deduzir que "uma boa parte das pessoas gosta de flores ou gosta de café"; ou ainda que "uma boa parte das pessoas gosta de café, gosta de praticar esporte e não gosta da guerra".

Seja $\mathcal{L}$ a lógica clássica de primeira ordem com identidade. A *Lógica do Plausível* $\mathcal{L}(P)$ é constituída a partir de $\mathcal{L}$ do seguinte modo.

Os axiomas de $\mathcal{L}(P)$ são aqueles de $\mathcal{L}$ acrescidos pelos seguintes axiomas para o novo quantificador (do plausível) P:

(A_1) $(Px\ \varphi(x) \wedge Px\ \psi(x)) \rightarrow Px\ (\varphi(x) \wedge \psi(x))$

(A_2) $(Px\ \varphi(x) \wedge Px\ \psi(x)) \rightarrow Px\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$

(A_3) $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow Px\ \varphi(x)$

(A_4) $Px\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$

(A_5) $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Px\varphi(x) \leftrightarrow Px\psi(x))$

(A_6) $Px\ \varphi(x) \rightarrow Py\ \varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$.

Os axiomas A_1 a A_4 são específicos da Lógica do Plausível, os outros dois axiomas têm o papel de possibilitar a adequação lógica ao modelo correspondente.

Intuitivamente, estes axiomas afirmam o seguinte:

(A_1) Se φ é plausível e ψ é plausível, então $\varphi \wedge \psi$ é plausível;

(A_2) Se φ é plausível e ψ é plausível, então $\varphi \vee \psi$ é plausível;

(A_3) Se φ é verdadeira para todos os indivíduos do universo, então φ é plausível;

(A_4) Se φ é plausível, então existe algum indivíduo do universo que satisfaz φ.

As regras de dedução do sistema $\mathcal{L}(P)$ são as mesmas de $\mathcal{L}$, nominalmente:

- *Modus Ponens* (MP): $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
- *Generalização* (Gen): $\varphi \vdash \forall x\ \varphi$.

As noções sintáticas usuais de $\mathcal{L}(P)$, como sentença, demonstração, teorema, conseqüência lógica, consistência e outras, são definidas como na lógica clássica de primeira ordem.

2. Espaços pseudo-topológicos

As investigações em Grácio (1999) procuraram estruturas matemáticas que pudessem interpretar quantificadores não-lógicos, distintos dos quantificadores $\forall$ e $\exists$, e que contemplassem aspectos do processo de generalização desenvolvido em raciocínio indutivo, ou seja, que expressem proposições gerais, entretanto distintas do todo (universal).

O conceito de pseudo-topologia foi introduzido como modelo para esta condição para a interpretação do quantificador "para uma boa parte". Em um primeiro momento, este conceito foi denominado *espaço topológico reduzido*, mas optamos por denominá-lo espaços pseudo-topológicos, com a concordância de Grácio.

Um *espaço pseudo-topológico* (E, Ω) é um par em que E é um conjunto não-vazio e Ω é uma família de subconjuntos de E, denominados *abertos* de Ω, satisfazendo as seguintes condições:

(pt1) a interseção de dois abertos de (E, Ω) é um aberto de (E, Ω);

(pt2) a união de dois abertos de (E, Ω) é um aberto de (E, Ω);

(pt3) E é um aberto de (E, Ω);

(pt4) $\varnothing$ não é um aberto de (E, Ω).

Um subconjunto de E é um *fechado* em (E, Ω) quando seu complementar é um aberto em (E, Ω).

Certamente, nenhum espaço pode ser topológico e pseudo-topológico concomitantemente, pois o primeiro exige que $\varnothing$ seja um aberto, ao passo que o segundo exclui $\varnothing$ como um aberto.

Apesar da flexibilização da definição, temos exemplos de espaços pseudo-topológicos que são matematicamente interessantes.

Exemplos:

(a) Sejam $E \neq \emptyset$ e $\Omega = \{E\}$.

Certamente $\emptyset \notin \Omega$, mas $E \in \Omega$. As condições (i) e (ii) são trivialmente satisfeitas. Então, (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico.

(b) Seja $E \neq \emptyset$. Para $a \in E$, considere $\Omega = \{B \subseteq E \,/\, a \in B\}$.

Então, $\emptyset \notin \Omega$, mas $E \in \Omega$.

Podemos facilmente verificar que (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico.

(c) Seja E um conjunto infinito e $\Omega = \{Y^C \,/\, Y \text{ é finito}\}$, isto é, Ω é uma coleção de subconjuntos co-finitos de E. Então, (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico.

Dado que E é infinito, então $\emptyset \notin \Omega$ e $E \in \Omega$.

(i) Se $Y^C, Z^C \in \Omega$, então Y e Z são subconjuntos finitos de E e, portanto, $Y \cup Z$ também é finito. Logo, $Y^C \cap Z^C = (Y \cup Z)^C \in \Omega$.

(ii) Se $Y^C, Z^C \in \Omega$, então Y e Z são subconjuntos finitos de E e, portanto, $Y \cap Z$ também é finito. Logo, $Y^C \cup Z^C = (Y \cap Z)^C \in \Omega$.

(d) Seja E um conjunto não-enumerável e $\Omega = \{Y^C \subseteq E \,/\, Y \text{ é enumerável}\}$. Logo, (E, Ω) é um espaço pseudo-topológico.

Dado que E é não-enumerável, então $\emptyset \notin \Omega$, mas $E \in \Omega$.

(i) Se $Y^C, Z^C \in \Omega$, então Y e Z são enumeráveis e, portanto, $Y \cup Z$ também é enumerável. Logo, $Y^C \cap Z^C = (Y \cup Z)^C \in \Omega$.

(ii) Se $Y^C, Z^C \in \Omega$, então Y e Z são enumeráveis e $Y \cap Z$ também é enumerável. Logo, $Y^C \cup Z^C = (Y \cap Z)^C \in \Omega$.

Com base nessa motivação, Grácio (1999) introduziu a estrutura pseudo-topológica – extensão de uma estrutura de primeira ordem – como modelo para a Lógica do Plausível e mostrou sua adequação (correção e completude) para $\mathcal{L}(P)$.

3. Semântica da Lógica do Plausível

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura de primeira ordem clássica com universo A. Uma *estrutura pseudo-topológica* $\mathcal{A}^\Omega$ para $\mathcal{L}(P)$ consiste da estrutura $\mathcal{A}$ acrescida de uma pseudo-topologia, isto é, $\mathcal{A}^\Omega = (\mathcal{A}, \Omega)$.

A *interpretação* dos símbolos relacionais, funcionais e de constantes individuais é a mesma de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{A}$.

Em uma estrutura $\mathcal{A}^\Omega$, a *satisfação* de $\mathcal{L}(P)$ é definida, recursivamente, do modo usual, acrescentando a seguinte cláusula:

• Seja φ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres está contido em $\{x\} \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ e $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ uma seqüência em A. Então:

$$\mathcal{A}^\Omega \vDash \mathrm{P}x\, \varphi[x, \bar{a}] \Leftrightarrow$$
$$\{b \in A \,/\, \mathcal{A}^\Omega \vDash \varphi[b, \bar{a}]\} \in \Omega,$$

em que, como usual, $\mathcal{A}^\Omega \vDash \psi[\bar{a}]$ denota $\mathcal{A}^\Omega \vDash_s \psi$, quando as variáveis livres da fórmula ψ ocorrem no conjunto $\{z_1, \ldots, z_n\}$, $s(z_i) = b_i$ e $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Para uma sentença $\mathrm{P}x\, \psi(x)$, temos:

$$\mathcal{A}^\Omega \vDash \mathrm{P}x\, \psi(x) \text{ se, e somente se,}$$
$$\{a \in A \,/\, \mathcal{A}^\Omega \vDash \psi(a)\} \in \Omega.$$

Outras noções semânticas usuais como modelo, validade, conseqüência semântica, etc, para $\mathcal{L}(P)$, são definidas de modo análogo àquelas para a lógica clássica.

4. Uma formalização do plausível sem o quantificador

Para obter a *Lógica Proposicional do Plausível* - $\mathcal{L}(\nabla)$ -, estendemos a lógica proposicional clássica dotando a linguagem clássica $L(\neg, \rightarrow)$ com um novo operador ∇. Formalmente, denotamos a linguagem da Lógica Proposicional do Plausível por $L(\neg, \rightarrow, \nabla)$.

A Lógica Proposicional do Plausível é determinada pelo que segue:

- Os axiomas proposicionais clássicos acrescidos dos seguintes axiomas para o operador ∇:
  (Ax_1) $\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \rightarrow \nabla(\varphi \wedge \psi)$
  (Ax_2) $\nabla\varphi \vee \nabla\psi \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi)$
  (Ax_3) $\nabla\varphi \rightarrow \varphi$
  (Ax_4) $\nabla(\varphi \vee \neg\varphi)$

- A regra de dedução *Modus Ponens* e a regra:

  (R∇) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi / \vdash \nabla\varphi \leftrightarrow \nabla\psi$.

Intuitivamente, os axiomas (Ax1) a (Ax4) afirmam:

(Ax_1) Se φ é plausível e ψ é plausível, então $\varphi \wedge \psi$ é plausível;
(Ax_2) Se φ é plausível ou ψ é plausível, então $\varphi \vee \psi$ é plausível;
(Ax_3) Se φ é plausível, φ ocorre;
(Ax_4) Todo teorema é plausível.
(R∇) Esta regra determina que quando duas proposições são equivalentes, também são equivalentes as plausibilidades das duas proposições.

5. A álgebra do plausível

Uma *álgebra do plausível* é uma 7-upla **P** = (P, 0, 1, ∧, ∨, ~, #) de modoque (P, 0, 1, ∧, ∨, ~) é uma álgebra *booleana* e # é o operador do plausível que respeita as seguintes condições:

(i) $\#a \wedge \#b \leq \#(a \wedge b)$
(ii) $\#a \vee \#b \leq \#(a \vee b)$
(iii) $\#a \leq a$
(iv) $\#1 = 1$.

Um elemento $0 \neq a \in$ **P** é plausível quando $\#a = a$.

Da condição (iii), segue que $\#0 = 0$. Entretanto, pela definição, 0 não é plausível. Não incluímos um axioma algébrico relativo a (R∇), pois em qualquer álgebra sempre vale $a = b \Rightarrow \#a = \#b$.

Uma álgebra **P** é *não-degenerada* quando seu universo P tem pelo menos dois elementos.

Proposição 5.1: Para cada álgebra do plausível **P** = (P, 1, 0, ∨, ∧, ~, #) existe um monomorfismo h de **P** em um espaço pseudo-topológico de conjuntos definidos em $\mathcal{P}(\mathcal{F}(P))$. ■

Teorema 5.2: Seja φ um membro de **For** $\mathcal{L}(\nabla)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\vdash \varphi$; (ii) $\models \varphi$; (iii) φ é válida em toda álgebra do plausível de alguma sub-álgebra de um espaço pseudo-topológico (E, Ω); (iv) $v^*_{\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, quando v^* é a valoração do modelo canônico.

Agradecimentos:

Este trabalho foi apoiado pela Fapesp através dos processos 2005/00408-3 e 2004/14107-2. Foi concluído quando professor Feitosa desenvolvia investigações de Pós-Doutorado na UFSC.

Bibliografia:

BARWISE, J., COOPER, R. (1981) Generalized quantifiers and natural language. ***Linguistics and Philosophy***, v. 4, 159-219.

CARNIELLI, W. A., VELOSO, P. A. S. (1997) Ultrafilter logic and generic reasoning. In: **Proceedings of Kurt Gödel Colloquium**, 5, 1997, Berlin. Berlin: Springer-Verlag. p. 34-53.

EBBINGHAUS, H. D. (1985) Extended logics: the generalized framework. In: BARWISE, J., FEFERMAN, S. (Ed.) **Model-theoretic logics**. Berlin: Springer-Verlag. p.25-76.

FEITOSA, H. A.; GRÁCIO, M. C. C.; NASCIMENTO, M. C. (2007) A propositional logic for Tarski's consequence operator}. Campinas: ***CLE E-prints***, p. 1-13.

FEITOSA, H. A.; GRÁCIO, M. C. C.; NASCIMENTO, M. C. (200_) A propositional version of logic of the plausible. (To appear)

GRÁCIO, M. C. C. (1999) **Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza**. Doctor Thesis (in Portuguese), Institute of Philosophy and Human Sciences, State University of Campinas, Campinas, Brazil. 194 p.

NASCIMENTO, M. C., FEITOSA, H. A. (2005) As álgebras dos operadores de conseqüência. São Paulo: ***Revista de Matemática e Estatística***, v. 23, n. 1, p. 19-30.

SETTE, A. M., CARNIELLI, W. A.,

VELOSO, P. (1999) An alternative view of default reasoning and its logic. In: HAUESLER, E. H., PEREIRA, L. C. (Eds.) **Pratica: Proofs, types and categories**. Rio de Janeiro: PUC. p. 127-58.